Teorema di Cauchy

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

Soddisfano la 1. e la 2. di th. Rolle.

Allora $\exists c \in (a,b) \mid [f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$.

Dimostrazione

Sia $w(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$

anche $w(x)$ soddisfa le stesse ipotesi poiché è una combinazione lineare di f e di g.

Ma inoltre soddisfa la 3. del th. Rolle.

$w(a) = [f(b)-f(a)]g(a) - [g(b)-g(a)]f(a)$
$w(b) = [f(b)-f(a)]g(b) - [g(b)-g(a)]f(b)$

$w(a) = f(b)g(a) - [\blacksquare] - g(a)f(b)$
$w(b) = f(b)g(a) - [\blacksquare] - g(a)f(b)$ $\Rightarrow w(a) = w(b)$.

$w'(x) = [f(b)-f(a)]g'(x) - [g(b)-g(a)]f'(x)$.

Nota che le quantità tra p. quadre sono costanti. //

$w'(c) = [f(a)-f(b)]g'(c) - [\blacksquare\, g(b)-g(a)]f'(c) = 0$.

□

Scrittura alternativa (caso particolare) $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

A patto che $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Non è necessario chiedere che $g(b)-g(a) \neq 0$.

Infatti se per assurdo fosse 0, e quindi $g(b) = g(a)$ allora $g(x)$ soddisferebbe il th. di Rolle e $g'(c) = 0$, che è falso per ipotesi. Quindi se $g'(x) \neq 0$, automaticamente anche $g(b)-g(a) \neq 0$.

Questo rapporto indica che la variazione della f e la variazione della g è eguagliata in un punto dalla derivata.

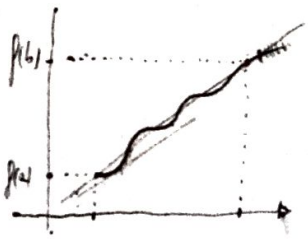
Teorema di Lagrange (del valor medio)

(Corollario di Cauchy)

[■] Ipotesi 1. e 2. di Rolle.

Allora $\exists c \in (a,b) \mid \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Significato geometrico:



Quindi esiste un punto in cui la tangente geometrica alla curva è parallela alla retta congiungente gli estremi.

Un altro modo di intenderlo è che $f'(c)$ è il valore medio della funzione.

⚠ Errore Classico:

[■] Lo studente medio disegna c nel centro dell'intervallo e poi ne fa la tangente.

Invece bisogna prima fare la congiungente e poi determinare il punto c.

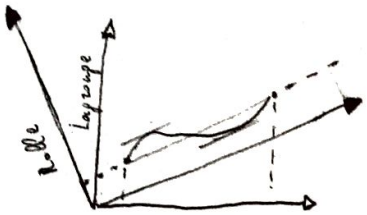
Dimostrazione

Dal th. Cauchy con $g(x) = x \Rightarrow$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \dfrac{g'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

$(g'(c) = 1)$.

Volendo si può interpretare il th. Rolle come un caso particolare di th. Lagrange



Applicazione - Test di Monotonia

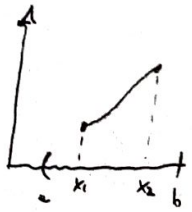
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile

$f'(x)\geq 0 \iff f$ crescente $\forall x\in(a,b)$

Dimostrazione

Parte ($\Leftarrow$)

Prendiamo $x_1, x_2 \in (a,b)$ e calcoliamo $f(x_2)-f(x_1)$



$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$$

Verifichiamo che soddisfi le ipotesi di th. Lagrange.

Essendo f derivabile in (a,b) è anche continua.

Soddisfa 1. e 2. e quindi $\exists c\in(x_1,x_2)$ |

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \Rightarrow f'(c)\geq 0$$

Nota che i punti x_1, x_2 sono scelti arbitrariamente, quindi la dimostrazione vale $\forall x\in(a,b)$.

Parte ($\Rightarrow$)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0 \Rightarrow \exists U_x \mid \frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h)-f(x)\geq 0 \\ h \quad \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ crescente}$$

Th. delle permanenza del segno (dirette, non deboli)

Osservazione

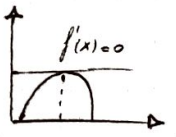
$f'(x)>0 \Rightarrow f$ strettamente crescente

[redacted]

Controesempio ($\Leftarrow$)

$f(x)=x^{(2n+1)}$ (Qualunque potenza dispari)

Esempio

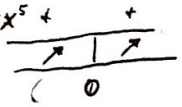


Studio i p. stazionari controllando cosa accade alla derivata vicino al punto

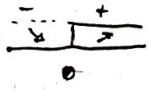
È un max? È un min?

Esempio

$f(x)=x^5$



$f(x)=x^4$



~~min~~ $x=0$ è un min.

Il segno di f' dà informazioni sulla f.

(!) Errore

$y=e^x+2 \quad y'=e^x \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow$ mai!

Allora sarà sempre crescente o sempre decrescente.

Esempio

Test Monotonia: $f(x)=x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

C.E. $\mathbb{R}$

I.A. $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

As. orizz. $\lim_{x\to\pm\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}}_{\text{confronto infiniti}} = \frac{\infty}{\infty} = 0$

(!) Cattivo atteggio:

imporre $f'(x)\geq 0$. Non è un errore però non serve. Bisogna cercare intorno agli zeri della funzione.

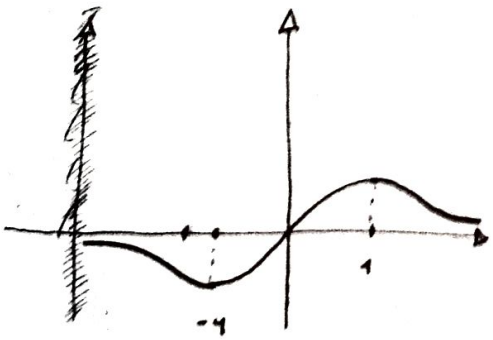
$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[1 + x\left(-\frac{2x}{2}\right)\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[1 - x^2\right]$$

Cerco dove si annulla.

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Proviamo a fare il grafico dei dati ottenuti.



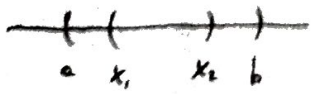
Possiamo notare i cambi di concavità/convessità vedendo come si comporta la curva. Questi cambi li chiameremo "flessi".

Se una funzione non ha punti stazionari probabilmente è sempre crescente o sempre decrescente.

Teorema

Se f è derivabile in $(a,b) \wedge f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$
Allora f è costante.

Dimostrazione



f è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2), che sono le ipotesi del th. Lagrange. Allora

$$\exists c \mid \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow$$

f è costante. Ricorda che la dimostrazione è generale perché funziona $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$.

Fondamentale $\int$

Teorema Chiave

Questo teorema sembra banale ma non lo è.

Teorema

Se $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \wedge f' = g' \ \forall x \in (a,b)$
derivabili

Allora $f = g + \text{cost.}$
Sono uguali a meno di una costante.

Dimostrazione

Calcoliamo $(f-g)' = f' - g'$, ma per ipotesi $f' - g' = 0 \Rightarrow (f-g)' = 0 \ \forall x \in (a,b)$

Per il th. precedente $f - g$ è una funzione costante.

Osservazione

F è primitiva se $F' = f$

Esempio

$f(x) = x^4 \quad F = \frac{x^5}{5} + c$

Quindi grazie al teorema precedente possiamo trovare una famiglia di primitive che differiscono per una costante.

Teoremi di De l'Hopital

Legano il limite del rapporto tra funzioni al limite del rapporto delle derivate.

Aneddoto

I teoremi sono in realtà da attribuire a Jean Bernoulli. De l'Hopital era un ufficiale nobile, che essendo miope fu congedato. Si potè concentrare quindi sullo studio della matematica. In quel periodo il calcolo inf stava nascendo grazie a Leibnitz e Newton.

De l'Hopital incontrò lo sgualtrinato Jean Bernoulli e lo assunse come insegnante per corrispondere in cambio di un lauto compenso. De l'Hopital inviava a Bernoulli i problemi affinché li risolvesse. Tra loro vigeva un accordo di non divulgazione. Nel 1 [redacted]

De l'Hospital pubblicò un libro proprio con i risultati di Jean Bernoulli, il quale accusò il primo di plagio. Molto tempo dopo furono scoperte le lettere, ma ormai i teoremi erano il nome di De l'Hospital.

Teorema di De l'Hopital (Enunciato Generale)

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b) $\wedge$ $g'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

$\wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure ∞)

$\wedge \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($\pm\infty$)

Allora $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

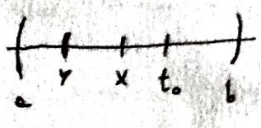
(!) Tale derivazione non sempre semplifica il calcolo.

(!) È il rapporto delle derivate, non la derivata del rapporto.

I Caso: Lim. Notevole $\frac{0}{0}$ e $L \in \mathbb{R}$

Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 \left| \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \right.$ se $x \in (a, t_0)$

Fisso in ordine i punti y e poi x nell'intervallo (a,b). Sfruttando il rapporto delle derivate cerchiamo di scoprire qualcosa sul rapporto delle funzioni.



f e g sono derivabili in (x,y) $\forall x,y$ in (a,b) e continue in $[x,y]$. Quindi si può applicare il th. Cauchy.

completa anno

Ricorda Cauchy

Ricordiamo che $g' \neq 0$.

$\exists$ un punto $t \in (y,x) \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right.$

Se il punto t appartiene anche ~~all'intorno destro~~ ad un intorno destro di a, $t \in (a, t_0)$.

Perciò

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - L \right| < \varepsilon$$

Per $y \to a$, $f(y), g(y) \to 0 \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

Poiché x e y sono stati scelti ~~nell'intorno~~ in un intorno di a. Lo spostamento che faccio verso a è uno spostamento rigido, quindi quando $y \to a$, $x \neq a$. Quindi $\frac{f(x)}{g(x)}$ è ben definito.

Caso: $L = \infty$

$\forall M > 0 \ \exists t_0 \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} > M \right. \ \forall x \in (a, t_0)$

La dimostrazione è uguale tranne la fine che diventa:

$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < M$, ma per $y \to a$ diventa

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M.$$

Caso: $\frac{\infty}{\infty}$, $L \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 . \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$ se $x \in (a, t_0)$

Poiché g, f derivabili su (x,y) e continue in $[x,y]$, possiamo applicare Cauchy.

$\frac{g(y)-g(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{g'(t)}{g'(t)}$ con $t \in (x,y)$

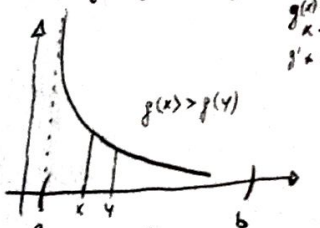
$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \right| < \varepsilon$

Tuttavia in questo caso non possiamo semplificare facendo tendere $y \to 0$, poiché in questo caso il limite va all'infinito.

$L - \varepsilon < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < L + \varepsilon$

$L-\varepsilon[\dots] < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left[\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right] < L+\varepsilon[\dots]$

$g(x) \to \infty$ per $x \to a$ e $g' \neq 0$



Moltiplichiamo tutto per $\left[\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right]$, questa operazione è lecita solo se conosco il segno ~~della~~ di tale frazione. Se quindi ipotesi che $[\dots] \geq 0$ potrei proseguire.

Tra le ipotesi $g' \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Per il test di monotonia, $g' \neq 0$ è strettamente monotona.

Per capire la monotonia, vedo che per $x \to a$, $g(x) \to \infty \Rightarrow$ g è strettamente decrescente.

Quindi $(g(x)-g(y)) > 0$. Ma per il th. permanenza del segno, siccome $g(x) \to +\infty$ per $x \to a^+$, ovvero $g(x) > 0$ in un intorno di a.

Quindi $\left[\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right] \geq 0$.

Se $g(x) \to -\infty$, $g(x) \leq 0$, $(g(x)-g(y)) \leq 0 \Rightarrow \left[\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right] \geq 0$.

Attenzione!

$\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(L-\varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g(y)}{g(y)} < \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(L+\varepsilon)$

per $x \to a^+$, $g(x) \to \infty$, ma $g(y) \to n \in \mathbb{R}$, non ad infinito, $\Rightarrow \frac{g(y)}{g(x)} \to 0$ per $x \to a^+$.

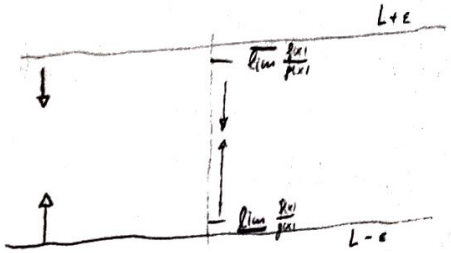
$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$ ma non ci basta, poiché anche $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ per $x \to a^+$.

Bisogna fare un altro ragionamento, ricordando il concetto di massimo limite e minimo limite.

$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \geq \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ forse non ammette limite per $x \to a^+$, ma di sicuro è limitata $\left(L-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L+\varepsilon\right)$.

Quindi $\overline{\lim_{x\to a^+}} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \underline{\lim_{x\to a^+}} \frac{f(x)}{g(x)}$.



Poiché ε è arbitrariamente piccolo, ~~allora~~ la distanza tra $L+\varepsilon$ ed $L-\varepsilon$ si riduce arbitrariamente. Ma $\overline{\lim}$ e $\underline{\lim}$ sono costretti ad essere all'interno di questa distanza. Per $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim} \Rightarrow \exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$

$L - \varepsilon < \underline{\lim} \frac{f(x)}{g(x)} < \overline{\lim} \frac{f(x)}{g(x)} < L - \varepsilon$ e poiché vale $\forall \varepsilon > 0$, vale anche per ε arbitrariamente piccolo, tale da far coincidere $\underline{\lim}$ e $\overline{\lim}$.

Caso: $\frac{\infty}{\infty}$, $L = \pm\infty$

Analogo a questo ma usando la definizione di limite $\forall M > 0 \ \exists t_0 . \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > M$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+x+1)}{\sin(x+x^3)} = F.I.\ \frac{0}{0}$$

Applichiamo De l'Hospital...

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(x^2+x+1))'}{(\sin(x+x^3))'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2+x+1}\cdot(2x+1)}{\cos(x+x^3)\cdot(3x^2+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x}^{0}+1}{\underbrace{x^2+x}_{\downarrow\, 0}+1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos(x+x^3)}_{\downarrow\, 1}\cdot\underbrace{(3x^2+1)}_{\downarrow\, 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Volendo si può reiterare De l'Hospital, se valgono ancora le ipotesi. Nei compiti le funzioni sono sempre derivabili.

(!) Prima di reiterare de l'Hospital, verifica che ci sia ancora una forma indeterminata.

Si può risolvere anche senza De l'Hospital...

Usiamo i limiti notevoli...

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+x+1)}{\sin(x+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{\ln(1+(x^2+x))}{x^2+x}}^{\to 1}\cdot x^2+x}{\underbrace{\frac{\sin(x+x^3)}{x+x^3}}_{\downarrow\, 1}\cdot x+x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(1+\underbrace{x^2}_{\downarrow\, 0})} = 1$$

Possiamo anche usare il confronto tra infinitesimi.

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)-\ln(\cos(x))}{x^2} = F.I.\ \frac{0}{0}$$

$$\overset{DH}{=} \frac{-(-\sin(x)) - \left(\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin(x))\right)}{2x} = \frac{\sin(x)+tg(x)}{2x} \overset{DH}{=}$$

$$\overset{DH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Possiamo usare lim. notevoli.

Risolviamo senza DH.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)-\ln(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x)\pm 1)}{x^2} = \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1}\cdot\frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

Realizzato dopo aver assunto sostanze!

Esempio

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{16-\sin^4(x) - (1+e^{2x})\cdot\ln(1+e^{2x})}{x^4\cdot e^{2x}} = F.I.\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{16-\sin^4(x)}{x^4\cdot e^{2x}} - \lim_{x\to +\infty} \frac{(1+e^{2x})\cdot\ln(1+e^{2x})}{x^4\cdot e^{2x}} =$$

Il numeratore è compreso tra 15 e 16, quindi è un numero che diviso ∞ va a zero

$$= -\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{(1+e^{2x})}{e^{2x}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{(1+e^{2x})}{x^4}}\right) =$$

il numeratore va all'infinito e quindi $1+e^{2x} \sim \frac{2x}{x^4} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+e^{2x})\ln(1+e^{2x})}{x^4 e^{2x}} \sim \frac{2x\cdot \cancel{e^{2x}}}{x^4\cdot \cancel{e^{2x}}}$$

Esempio

Se potete, evitate De l'Hospital

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x\to+\infty \\ \frac{1}{2} & \text{se } x\to-\infty \end{cases}$$

Formula di Taylor

Sia $f(x)$ derivabile in x_0, sappiamo che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, cioè la funzione può essere approssimata in x_0 da un polinomio che rappresenta la tangente passante in $(x_0, f(x_0))$.

Definizione Contatto di ordine n

Siano f e g due funzioni continue e derivabili in x_0, e se ho che:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

allora dico che f e g hanno un contatto di primo ordine.

In generale, siano f e g derivabili n volte in un punto x_0, si dice che hanno un contatto di ordine n se e solo se:

$$f(x_0)=g(x_0) \wedge f'(x_0)=g'(x_0) \wedge \dots \wedge f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0).$$

Da tale relazione discendono innumerevoli informazioni. Tra queste notiamo la progressiva somiglianza delle due funzioni nel punto di contatto:
- per $n=1$, f e g hanno la medesima tangente
- per $n=2$, f e g hanno la stessa concavità
- e così via ...

Questo concetto si può applicare nelle formule di Taylor, che sono approssimazioni, con accuratezza sempre crescente, di funzioni. Questo è molto utile nel caso la funzione sia difficilmente calcolabile.

Per trovare un polinomio di Taylor è necessario avere una funzione f, derivabile n volte in un punto, e stabilire un contatto di ordine n fra la funzione f ed un polinomio $T_n(f)$.

La formula generica di un polinomio di grado n di questo tipo è la seguente:

$$T_n(f): a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Il problema è trovare una $n+1$-pla di fattori tali da avere il contatto richiesto:

- $f(x_0) = T_n(x_0) = a_0$
- $f'(x_0) = T'_n(x_0) = a_1$
- $f''(x_0) = T''_n(x_0) = 2a_2$
- $\vdots$
- $f^{(n)}(x_0) = T^{(n)}_n(x_0) = n!\,a_n$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow$$

$$T_n(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Il polinomio così fatto si indica anche come $T_n(f, x_0)$ e può essere scritto nella forma:

$$T_n(f, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Esempio

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$T_n(e^x, 0) = e^0 + e^0(x-x_0) + \frac{e^0}{2}(x-0) + \dots + \frac{e^0}{n!}(x-0)^n \Rightarrow$$

$$T_n(e^x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} \Rightarrow T_n(e^x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Esempio

$f(x) = \sin(x) \qquad x_0 = 0$

$$T_n(\sin(x), 0) = \sin(0) + \cos(0)x + (-\sin(0))\frac{x^2}{2} + \dots + \sin^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \Rightarrow$$

$$T_n(\sin(x), 0) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n \Rightarrow$$

$$T_n(\sin(x), 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k$$

Nota: compaiono solo potenze dispari perché il seno è una funzione dispari, e quindi il polinomio di Taylor ha le medesime caratteristiche.

Esempio

$f(x) = \cos(x) \qquad x_0 = 0$

$$T_n(\cos(x), 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2k!}(-1)^k$$

Anche qui notiamo che, essendo la funzione pari, abbiamo solo funzioni pari.

Esempio

$f(x) = \ln(1+x) \qquad x_0 = 0 \qquad T_n(\ln(1+x), 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}(-1)^k$

Essendo calcolati in $x_0 = 0$, sono anche chiamati polinomi di Maclaurin.

Proprietà

1. $T_n(af + bg) = aT_n(f) + bT_n(g)$
2. $T'_n(f) = T_n(f')$

Dimostrazione 1 Ovvia, poiché T_n è una ovvia combinazione lineare,

Dimostrazione 2 Ovvia, basta svolgere i calcoli.

+1 Assenza

Analisi ③

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+E_n(x;x_0)$$ (scrivere $\sim=$ o aggiungere l'errore)

#moinagioia!

Pol. di Taylor: applicazioni e proprietà.

Stima dell'errore:

1) forma di Peano
2) forma di Cauchy (o resto di Lagrange)

Forma di Peano

Ipot: f derivabile n volte in (a,b)

Tesi: $E_n(x;x_0)=o(x-x_0)$

$$o(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{E_n(x;x_0)}{(x-x_0)}=0$$

Dimostrazione (per Induzione)

$n=1 \to f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+E_1(x;x_0)$

Supponiamo sia vera per $n \Rightarrow$

$E_n(x;x_0)=o(x-x_0)^n$ mostriamo che $E_n(x;x_0)=o(x-x_0)^{n+1}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{E_{n+1}(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=0 \quad ?$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n+1}(f)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1!)}\right.}{(x-x_0)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}=\frac{0}{0}\overset{DH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(n+1)(x-x_0)^n}.$$

Sfrutto l'ipotesi per far vedere che il polinomio tende a 0.

Se avessi derivato precedentemente sarebbe successo questo:

$$\overset{DH}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T'_{n+1}(f)}{(n+1)(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n(f')}{(n+1)(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{E_n(x;x_0)}{(n+1)(x-x_0)^n}=0$$

Forma di Cauchy (o resto di Lagrange)

Ipot: f derivabile $n+1$ volte in (a,b), tranne al più x_0

Tesi: $E_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Più preciso ma più ipotesi. L'unico dato arbitrario è c.

Osservazione

per $n=0 \to E_0(x;x_0)=f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$

che è il th di Lagrange, che a sua volta è un caso particolare di Th. di Cauchy.

Quindi la f di Taylor sarebbe di fatto una generalizzazione di questi teoremi

Detto in modo intuitivo (grossolano)! ↑

Applicazione

Teorema f deriv n volte.

Supponiamo allora $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{n-1}(x_0)=0$

allora $f^{(n)}(x_0)\neq 0 \to \begin{cases} n \text{ pari} \\ n \text{ dispari}\end{cases}$

se n pari:

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ è un minimo} \\ f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ è un massimo}\end{cases}$$

se n dispari: x_0 non è né max né min.

Esempio

$f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3 \to f'(0)=0$

$f''(x)=12x^2 \to f''(0)=0$

$f'''(x)=24x \to f'''(0)=0$

$f^{IV}(x)=24 \to f^{IV}(0)=24$

$24>0 \to x_0=0$ è un punto di minimo.

Questo test è utile ~~poi~~ quando la derivata prima sia complicata e sia difficile studiarne il segno.

Dimostrazione

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

Ma poiché la derivata n-esima è la prima che non si annulla, la formula diventa:

$$\cancel{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n}$$

$$f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right]$$

Quando n è pari...

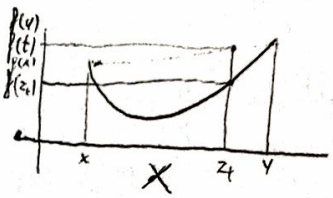
A questo punto il segno dipende solo dal segno di $f^{(n)}(x_0)$ e fornisce la differenza tra $f(x)-f(x_0)$.

+2 Assenze

Analisi (64)

Se invece n è dispari, $(x-x_0)^n$ cambia segno in un intorno di $x_0 \Rightarrow$ non è né un max né un min.

Concavità, convessità, Flessi



$f: X \to \mathbb{R}$

Se la curva è tutta al di sotto dei due estremi si dice convessa, mentre se sta tutta sopra la corda si dice concava.

Concavità e convessità sono proprietà geometriche, che non hanno relazioni con le derivate.
Rielaboriamo tali affermazioni nei termini dell'analisi.

Preso un punto della curva nell'intervallo (x,y) è minore del punto sulla retta che passa per gli estremi:

$z_t = (1-t)x + ty$ con $t \in [0,1]$ e $z_t \in [x,y]$

per $t=0$ $\quad (1-0)x + 0y = x$
per $t=1$ $\quad 0x + 1y = y$
per $t=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = \frac{x+y}{2}$

$f(x) < f(t) < f(y) \Rightarrow$

$f(t) = (1-t)f(x) + tf(y)$

$f(z_t) \leq f(t) \Rightarrow f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ convessa

se vale il minore stretto, si dice <u>strettamente convessa</u>

Quando vale l'uguale, cioè la curva coincide sulle rette, otteniamo una applicazione lineare.

Proposizione

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e f è concava o convessa
allora:
- $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ oppure
- $f'(x)$ è continua

Proprietà

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

1) se è derivabile 1 volta in (a,b) allora vale che
   - f' crescente $\Leftrightarrow$ f convessa
   - f' decrescente $\Leftrightarrow$ f concava

2) se f è derivabile 2 volte in (a,b) allora vale che
   $f'' \geq 0 \Leftrightarrow f$ convessa
   $f'' \leq 0 \Leftrightarrow f$ concava

La 1) la si intuisce notando come in una curva convessa il coeff. angolare della retta tangente alla curva cresce nell'intervallo

Per la 1) vale inoltre che <u>se</u>
f' è strettamente cresc/decresc allora
f è strettamente convesse/concave

La 2) invece si comprende notando come questo sia effettivamente un teste di monotonia sulla derivata, il che ci riconduce alla parte 1)

Per la 2) vale inoltre che <u>se (non sse)</u>
$f'' \geq 0$ allora f è strettamente convessa
$f'' < 0$ allora f è strettamente concava

Definizione di p. di flesso

f derivabile in x_0 oppure $f'(x_0) = \pm\infty$,
se $\exists I^+_{x_0}$ dove f è concava (convesse) e
se $\exists I^-_{x_0}$ dove f è convessa (concava)
allora x_0 è un punto di flesso.

Cioè in x_0 cambia concavità.

Esempio/Esercizio Analisi

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x-2}}$$

Condizioni di Esistenza

Poiché abbiamo una frazione impongo il denominatore diverso da zero:

$e^x - 2 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 2 \Rightarrow$ [redacted] $x \neq \ln 2$

Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{e^0-1}{e^0-2} \Rightarrow 0 \end{cases}$$

$y=0$ si ommette poiché noto dal passaggio precedente.

Ricerca di eventuali asintoti

Cerco asintoti orizzontali...

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} \Rightarrow$ per confronto di infiniti, si nota che l'elemento dominante è e^{2x}, quindi vedo l'andamento di tale elemento per $x \to \pm\infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{per } x \to +\infty \\ \frac{1}{2} & \text{per } x \to -\infty, \text{ infatti } e^{2x} \to 0 \text{ e } e^x \to 0 \end{cases}$$

Quindi sappiamo che esiste un asintoto orizzontale $y = \frac{1}{2}$ per $x \to -\infty$

Poiché a destra ho ottenuto $+\infty$, posso cercare eventuali asintoti obliqui:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$ il confronto tra infiniti si riduce a

$\Rightarrow \frac{e^x \cdot e^x}{e^x \cdot x} \Rightarrow +\infty \Rightarrow$ non abbiamo asintoti obliqui.

Cerchiamo ora eventuali asintoti verticali nei punti in cui f non è definita...

$$\lim_{x\to\ln 2^\pm} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} = \lim_{x\to\ln 2} \frac{e^{2\ln 2}-1}{e^{\ln 2}-2} = \lim_{x\to\ln 2} \frac{4^\pm-1}{2^\pm-2} =$$

$$\begin{cases} +\infty & \text{per } 2^+ \\ -\infty & \text{per } 2^- \end{cases} \Rightarrow$$ Quindi abbiamo un asintoto verticale in $x = \ln 2$

Risultati notevoli!

Dominio $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

$I \cap x \to (0,0)$

$A \leq H: \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x \to -\infty \end{cases}$

$A \leq V: \begin{cases} x \to \ln 2^+ \\ y \to +\infty \\ - \\ x \to \ln 2^- \\ y \to -\infty \end{cases}$

$f' = \frac{e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(e^x-2)^2}$

Calcolo la derivata prima di f...

$$f'(x) = \frac{h'g - g'h}{g^2}$$

$h = e^{2x}-1 \qquad h' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 =$

$g = e^x - 2 \qquad g' = e^x$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-2) - e^x(e^{2x}-1)}{(e^x-2)^2} = \frac{e^x(2e^{2x}-4e^x) - e^x(e^{2x}}{(e^x-2)^2}$$

$$= \frac{e^x(2e^{2x}-4e^x-e^{2x}+1)}{(e^x-2)^2} = \frac{e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(e^x-2)^2}$$

Cerchiamo di annullare la derivata prima per la ricerca di punti stazionari...

~~Per comodità~~

Sostituiamo: $t = e^x$, $x = \ln t$

$\cancel{2t^2 - 4t + 1 = 0 \qquad \Delta = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = \sqrt{4-3} = 2\sqrt{3}}$

$\cancel{\frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -4-\sqrt{3} \\ t_2 = -4+\sqrt{3} \end{cases}}$

$$\frac{t(2t^2-4t-t+1)}{(t-2)^2} = 0$$

Il denominatore non si annulla mai, infatti per $t=2$ si avrebbe $x = \ln 2$ che è già escluso dal campo di esistenza.

$t = 0 \to x = \ln 0 \notin \mathbb{R}$

$2t^2 - 4t - t + 1 = 0$

$t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Delta = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$

$$\frac{+4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} t_1 = 2-\sqrt{3} \\ t_2 = 2+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln(2-\sqrt{3}) \\ x_2 = \ln(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

Vediamo ora dove la derivata è maggiore di zero per capire l'andamento della funzione...

Il denominatore è al quadrato, quindi sempre positivo!

Quindi poiché studio eq>0 prendo gli intervalli esterni: $x < \ln(2-\sqrt{3}) \vee x > \ln(2+\sqrt{3})$

Calcolo $f(\ln(2 \pm \sqrt{3})$ per trovare le ordinate dei punti di max e min:

max in $(\ln 2 - \sqrt{3}; 4+2\sqrt{3})$

min in $(\ln 2+\sqrt{3}; 4-2\sqrt{3})$

Tre tipi di flessi:

- a tangente orizzontale — se $f'(x_0) = 0$
- a tangente obliqua — se $f'(x_0) = m \neq 0 \in \mathbb{R}$
- a tangente verticale — se $f'(x_0) = \pm\infty$

La ricerca delle tangenti nei punti di flesso non è fondamentale, fortela se avete tempo.

Come trovare i candidati ad essere p. di flesso?

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ convessa} \\ f''(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ concava} \end{array}\right\} \rightarrow \text{i candidati sono le } x \text{ per cui } f''(x) = 0.$$

Studio allora il segno della f'' e vedo se cambia segno prima e dopo il punto candidato.

<u>Esempio</u>

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} \qquad \text{CE} \quad e^x - 2 \neq 0, \quad e^x \neq 2, \quad x \neq \ln 2$$

Per fortuna e^x è definito su tutto $\mathbb{R}$.

(!) Attenzione: mentre e^x è sempre definita, le sue composte non lo sono necessariamente. Es. $e^{\frac{1}{x}}$.

IA

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \dfrac{e^0-1}{e^0-2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-2} = 0 \Rightarrow e^{2x}-1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{+\infty} +\infty \text{ (per confronto di infiniti)} \\ \searrow \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\text{asintoto orizzontale sinistro}} \end{array}$$

Cerco un eventuale asintoto obliquo a destra...

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{e^x \cdot e^x}{e^x \cdot x} \Rightarrow +\infty \text{ per confronto di infiniti}$$

Cerco nei confronti del campo di esistenza...

$$\lim_{x\to\ln 2^{\pm}} \frac{e^{2x}-1}{e^x-2} = \frac{e^{2\ln 2}-1}{e^{\ln 2}-2} = \frac{4-1}{2^{\pm}-2} = \pm\infty \Rightarrow \underline{\text{asintoto verticale in } \ln 2}$$

~~K.parach~~
r.paracchini@gmail.com

Attenzione al CE, sbagliare questo invalida il compito.

Riportate le informazioni salienti in un riquadro per comodità per fare il grafico.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-2) - e^x(e^{2x}-1)}{(e^x-1)^2}$$

Mettete in evidenza prima di moltiplicare!

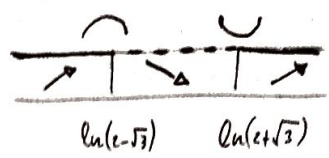
$$\frac{e^x(2e^{2x} - 4e^x - e^{2x} + 1)}{(e^x-1)^2}$$

$$\frac{e^x(2e^{2x} - 4e^x - e^{2x} + 1)}{(e^x-1)^2} = 0$$

Sostituiamo: $e^x = t$

$t(\quad -4t - \quad + 1)$

$e^x = 2+\sqrt{3} \qquad x = \ln(2+\sqrt{3})$
$e^x = 2-\sqrt{3} \qquad x = \ln(2-\sqrt{3})$



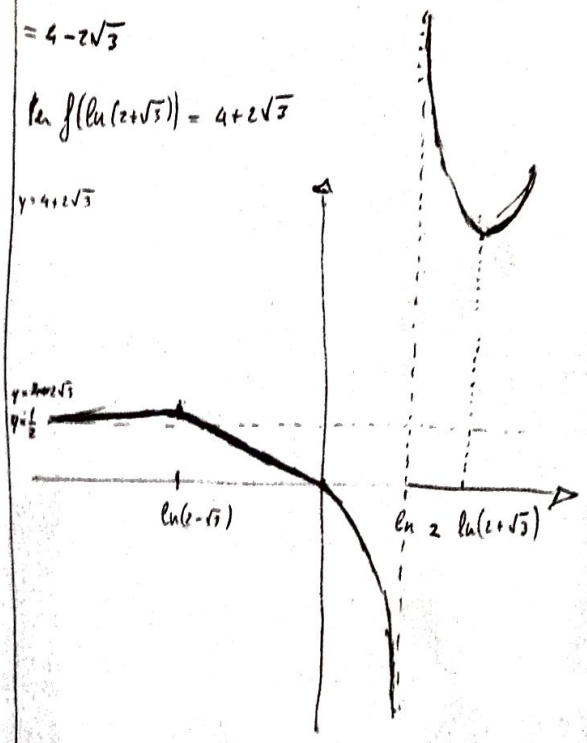
Denominatore sempre positivo (intervalli esterni)

$$f(\ln(2-\sqrt{3})) = \frac{e^{2\ln(2-\sqrt{3})}-1}{e^{\ln(2-\sqrt{3})}-2} = \frac{(2-\sqrt{3})^2-1}{2-\sqrt{3}-2} =$$

$$\frac{4-4\sqrt{3}+3-1}{-\sqrt{3}} = \frac{6-4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-6\sqrt{3}+12}{3} = \frac{\cancel{3}(4-2\sqrt{3})}{\cancel{3}} =$$

$$= 4-2\sqrt{3}$$

Per $f(\ln(2+\sqrt{3})) = 4+2\sqrt{3}$



Posso cercare l'intersezione della curva con l'asintoto orizzontale.

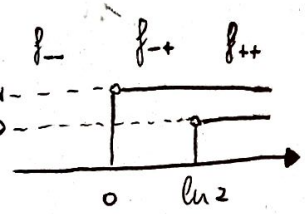
$$f(x) = \frac{|e^x - 1| + 1}{|e^{2x} - 4| + 1}$$

È importante capire come si comporta la funzione nei vari intervalli!

CE $x \neq \ln 2$

$$|e^x - 1| = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } e^x - 1 \geq 0 \\ 1 - e^x & \text{se } e^x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$|e^{2x} - 4| = \begin{cases} e^{2x} - 4 & \text{se } e^{2x} - 4 \geq 0 \\ 4 - e^{2x} & \text{se } e^{2x} - 4 < 0 \end{cases}$$



$$f_{--}(x) = \frac{2 - e^x}{5 - e^{2x}} \quad \text{se } x \leq 0$$

$$f_{-+}(x) = \frac{e^x}{5 - e^{2x}} \quad \text{se } 0 < x \leq \ln 2$$

$$f_{++}(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 3} \quad \text{se } x > \ln 2$$

IAX

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{|1-1|+1}{|1-4|+1} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ f_{--}(x) = 0 \to \dfrac{2 - e^x}{4e^{2x} + 4} \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow \text{NON accettabile per CE} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ f_{-+}(x) = 0 \to \dfrac{e^x}{5 - e^{2x}} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \text{mai!} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ f_{++}(x) = 0 \to \dfrac{e^x}{e^{2x} - 3} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \text{mai!} \end{cases}$$

Limiti

$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{2 - e^x}{5 - e^{2x}} = \frac{2}{5} \qquad \lim_{x \to +\infty} = \frac{e^x}{e^{2x} - 3} = 0 \text{ (confronto inf)}$$

$f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\ln 2) = 2$

$$f'_{--} = \frac{-e^x(5 - e^{2x}) + 2e^{2x}(2 - e^x)}{(5 - e^{2x})^2} = \frac{e^x(e^{2x} - 5 + 4e^x - 4e^{2x})}{(\ )^2} =$$

$$= \frac{e^x(-e^{2x} + 4e^x - 5)}{(\ )^2}$$

Vediamo dove si annulla usando $t = e^x$

$$-t^2 + 4t - 5 \to t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 5}}{-1}$$

Quindi f'_{--} è sempre negativa e allora f_{--} è sempre decrescente (nella zona considerata)

$$f'_{-+}(x) = \frac{e^x(5 - e^{2x}) + 2e^{2x}(e^x)}{(5 - e^{2x})^2} =$$

$$= \frac{e^x(5 - e^{2x} + 2e^{2x})}{(\ )^2} = \frac{e^x(e^{2x} + 5)}{(\ )^2}$$

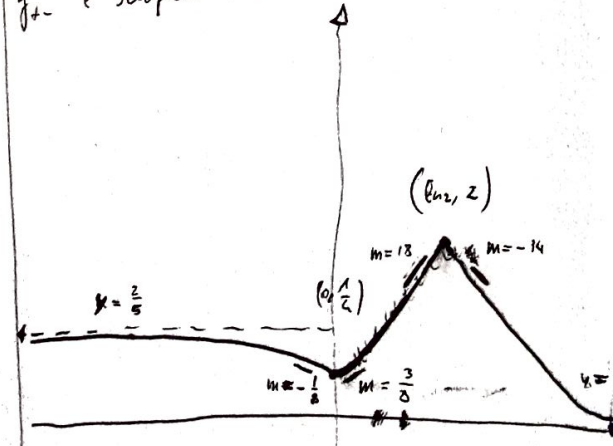
$t^2 + 5 \Rightarrow$ sempre > 0!

Quindi f'_{-+} è sempre positiva e f_{-+} è sempre crescente.

$$f'_{++} = \frac{e^x(e^{2x} - 3) - 2e^{2x}(e^x)}{(\ )^2} = \frac{e^x(e^{2x} - 3 - 2e^{2x})}{(\ )^2} =$$

$$\frac{e^x(-e^{2x} - 3)}{(\ )^2} \qquad -t^2 - 3 \Rightarrow \text{sempre} < 0!$$

Quindi f'_{++} è sempre negativa e f_{-+} è sempre decrescente.



Ricerca p. angolosi e calcolo coeff. angolare a sx e dx.

$$f'_{++}(\ln 2) = \frac{-2(4+1)}{4 - 3^2} = -14$$

$$f'_{-+}(\ln 2) = \frac{2(5+4)}{5 - 4} = 18$$

$$f_{-+}(0) = \frac{3}{8} \qquad f_{--}(0) = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{|\ln^2 x - 1| + 1}{|\ln x - 2| + 1}$$

Come è definita? Siccome sono sempre positive

$$|\ln^2 x - 1| = \begin{cases} \ln^2 x - 1 & \text{se } \ln^2 x - 1 \geq 0 \\ \end{cases}$$

Sostituiamo in $t = \ln^2 x \rightarrow t^2 - 1 \geq 0$ $\quad t \leq -1 \quad t \geq 1$

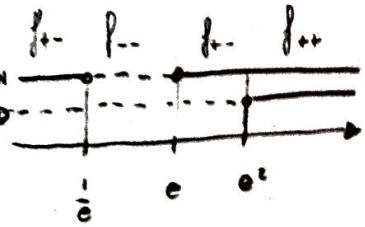
$\Downarrow$

$\ln x \leq -1 \quad \ln x \geq 1$

$\Downarrow$

$x_1 = e \quad x_2 = \frac{1}{e}$

Calcoliamo $\ln x - 2 > 0 \Rightarrow x > e^2$



$C.E. \ \forall x > 0$

$$f_{++}(x) = \frac{\ln^2 x}{\ln x - 1} \quad \text{se} \quad x > e^2$$

$$f_{+-}(x) = \frac{\ln^2 x}{3 - \ln x} \quad \text{se} \quad \begin{matrix} e < x < e^2 \\ 0 < x < \frac{1}{e} \end{matrix}$$

$$f_{--}(x) = \frac{\ln^2 x - 2}{\ln x - 3} \quad \text{se} \quad \frac{1}{e} < x < e$$

Int Ax

$\begin{cases} x = 0 \\ \text{impossibile} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \text{Mai} \end{cases}$

Ricerca asintoti

$\lim_{x \to 0^+} f_{+-} = +\infty$ (confronto inf) $\rightarrow$ As VDx $(x = 0)$

$\lim_{x \to +\infty} f_{++} = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f_{++}}{x} = 0$ (Non ci obbligano!)

Derivate

$$f'_{++} = \frac{\frac{2\ln x}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln^2 x)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{\ln x (\ln x - 1)^2}{}$$

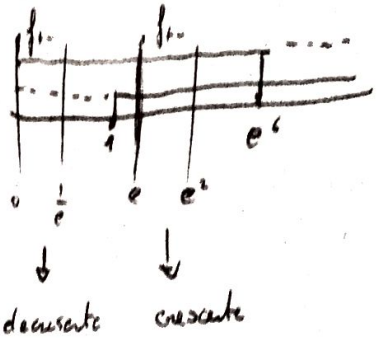
$\ln x = 0 \quad x = 1$ $\quad f'_{++}$ sempre > 0

$\ln x - 2 = 0 \quad x = e^2$ $\quad f'(e^2) = \infty$

$$f'_{+-}(x) = \frac{2\ln x}{x}(\ln x - 1) + \frac{1}{x}(\ln^2 x)$$

$$\frac{\ln x}{x}(6 - 2\ln x +$$

$\ln x = 1 \Rightarrow x = e^1$



decrescente $\quad$ crescente

f_{+-} crescente in $e < x < e^2$ e

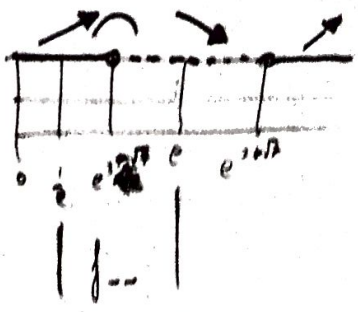
f_{+-} decrescente in $0 < x < \frac{1}{e}$

$$f'_{--} = \frac{\frac{2\ln x}{x}(\ln x - 3) - \frac{1}{x}(\ln^2 x - 2)}{(\ln x - 3)} =$$

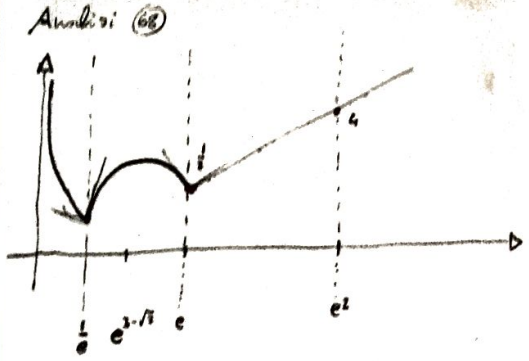
$$= \frac{\frac{1}{x}(2\ln^2 x - 6\ln x - \ln^2 x + 2)}{(\ln x - 3)^2} =$$

$$= \frac{\ln^2 x - 6\ln x + 2}{x(\ln x - 3)^2}$$

$t^2 - 6t + 2 = 0 \quad t = 3 \pm \sqrt{7}$



$f(e^{3-\sqrt{7}}) = \frac{(3-\sqrt{7})^2 - 2}{3-\sqrt{7}-3}$, $6 - 2\sqrt{7} \rightarrow$ Max



Esercizio

$$f(x) = \ln|x^2-4| - \frac{1}{x+2}$$

CE: $x \neq -2$

$|x^2-4| \geq 0 \Rightarrow$

$x^2-4 \neq 0 \Rightarrow$

$x \neq \pm\sqrt{2}$

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } x<-2 \vee x>2 \\ 4-x^2 & \text{se } -2<x<2 \end{cases}$$

$$f_+ = \ln(x_2-4) - \frac{1}{x+2}$$

$$f_- = \ln(4-x_2) - \frac{1}{x+2}$$

IAx

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \ln 4 - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \ln x^2-4 - \frac{1}{x+2} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

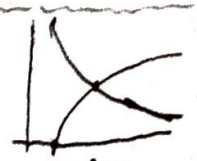
$$\ln(x^2-4) = \frac{1}{x+2}$$

$p(0, \ln 4 - \frac{1}{2})$

Troppo complessa, non vale la pena.

$q(2{,}29, 0) \leftarrow \boxed{\frac{\infty}{\pm\infty}}$

Esempio $\ln x = \frac{1}{x}$



$1 \leftarrow \ln(1) = 0$

Risoluzione per via grafica.

Quindi sappiamo solo che è di poco maggiore di 1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_+(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-4) - \frac{1}{x+2} = +\infty$$

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_+(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{x} \overset{DH}{=} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2-4}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-4} = 0 \text{ (den. cresce più velocemente).}$$

Esempio ma non scrivere all'esame

$$\lim_{x\to-2^\pm} f(x) = \lim_{x\to-2^\pm} \ln|x^2-4| - \frac{1}{x+2} =$$

val assoluto

$$= \lim_{x\to-2^\pm} \underbrace{\ln(0^+)}_{-\infty} - \underbrace{\frac{1}{2^\pm+2}}_{0^+} = \begin{cases} -2^+: & -\infty-\infty = -\infty \\ -2^-: & -\infty+\infty = ? \end{cases}$$

As. Vert

$$= \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+2)\ln|x^2-4|-1}{x+2} = +\infty$$

$$\ln(x^2-4) \sim \ln x^2 = 2\ln x$$

Poiché abbiamo visto che tra $\ln \to \infty$ e $\text{pow} \to 0$, la potenza domina ...

Deriviamo

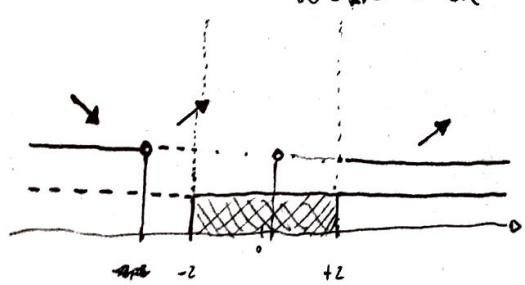
$$f'_+(x) = \frac{2x}{x^2-4} - \left[(x+2)^{-1}\right]' = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2)+x-2}{(x+2)^2(x-2)} =$$

$$= \frac{2x^2+4x+x-2}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{2x^2+5x-2}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$f'_+(x) = 0 ? \to \frac{-5\pm\sqrt{41}}{4} \overset{+}{\sim} \frac{1}{2} \text{ non accettabile}$$

$$\overset{-}{\sim} -2{,}8 \to \text{ok}$$

Significa trovare le intersezioni tra una logaritmica ed un'iperbole.

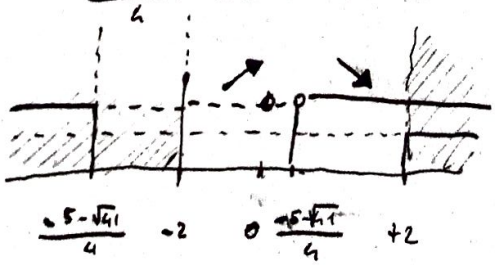


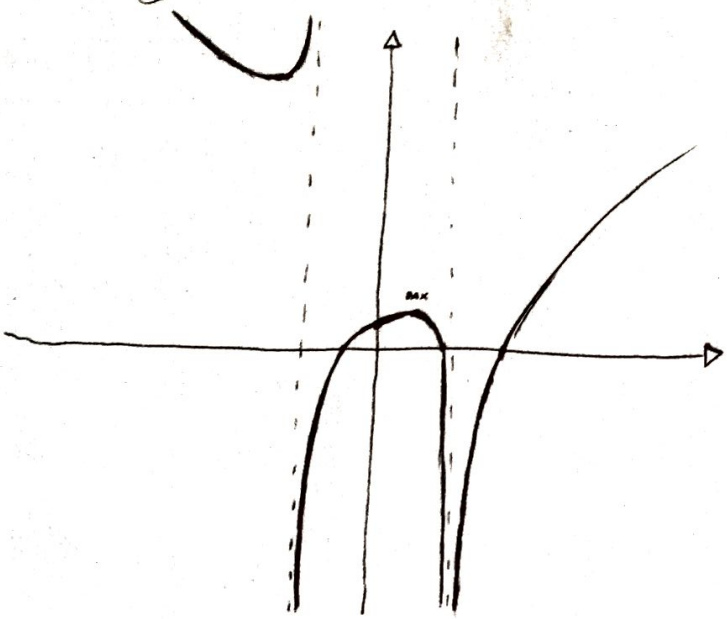
$\frac{-5-\sqrt{41}}{4}$ $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right)$

$$f'_-(x) = \frac{-(2x)}{-(x^2-4)} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2x}{x^2-4} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f'_-(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5+\sqrt{41}}{4} \sim \frac{1}{2} \to \text{ok}$$

$\frac{-5-\sqrt{41}}{4} \sim$ non accettabile





$$f''(x) = \left(\frac{2x^2+5x-2}{(x-2)(x+2)^2}\right)' = (4x+5)\left[(x^2-4)(x+2)\right] - \dots\dots$$

← Non ne aveva più voglia!

Esercizio

$$f(x) = \frac{6x}{x-2}$$

C.E. $x \neq 2$

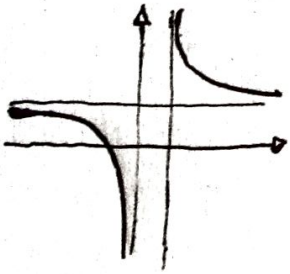
Iax $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

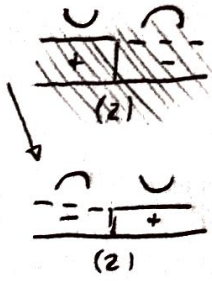
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{x-2} = 6$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{6x}{x-2} = \pm\infty$

$$f'(x) = \frac{6(x-2)-6x}{(x-2)^2} = \frac{-12}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0$? no!

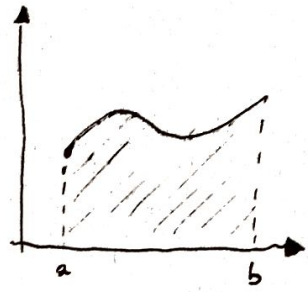
$$f''(x) = -12\cdot\left((x-2)^{-2}\right)' = +\frac{24}{(x-2)^3}$$



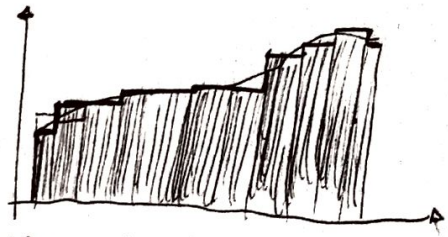


Integrali

Nasce dalla necessità di calcolare l'area di forme irregolari.



Si cerca di misurare l'area per esaustione, cioè come somma di aree di figure note.



Alterno l'altezza tra min e max.

Il passo chiave è svincolare tale costruzione dalla scelta dei punti.

Importante ⇒ intervallo chiuso

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con $[a,b]$ chiuso e limitato ⇒ compatto

e f limitata.

$D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$ è detta partizione di $[a,b]$. I sottointervalli non sono necessariamente della stessa dimensione.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\qquad (x_{i-1}, x_i)$

$\sum_{i=1}^{n} \inf_{(x_{i-1},x_i)} f(x) \cdot \Delta x_i$ Area grande : Area piccola

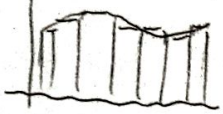
$s(D,f)$ somma inferiore relativa a D, f

$S(D,f)$ somma superiore

$m(b-a)$

mai na gioia

Integrale di Riemann



$$m(b-a) \leq s(D,f) \leq S(D,f) \leq M(b-a)$$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

$m(b-a) \in \mathbb{R}$

$M(b-a) \in \mathbb{R}$

f limitata permette di calcolare

la suddivisione in modo arbitrario.

Cosa succede se miglioro la scelta?

Definizione - Suddivisione più fine

D_1, D_2 di $[a,b]$ dico che D_1 è più fine di D_2 se $D_1 \supset D_2$

Più fine non solo contiene più punti, ciò che conta è che debbano esserci gli stessi punti più altri (almeno uno).

Una suddivisione più fine migliora la precisione della suddivisione.

Ricorda che $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ non è un intervallo, ma una partizione di $[a,b]$.

Posso eliminare il rettangolo W grazie all'ampiezza del punto ξ

$\xi \to x_i$

$$s(D_2,f) \leq S(D_2,f)$$

$$s(D_2,f) \leq s(D_1,f)$$
$$S(D_2,f) \geq S(D_1,f)$$

Siano D_1, D_2 due suddivisioni qualunque, come faccio a capire chi sia più fine?

Sia $D_3 = D_1 \cup D_2$, allora D_3 è più fine di ciascuna delle due (infatti ne contiene i punti, più altri).

$$s(D_1,f) \leq s(D_3,f) \leq S(D_3,f) \leq S(D_2,f) \Rightarrow$$
$$= s(D_1,f) \leq S(D_2,f)$$

Quindi, comunque io suddivida, le somme superiori sono sempre più grandi delle somme inferiori.

$$m(b-a) \leq s(D_1,f) \leq S(D_2,f) \leq M(b-a)$$

considero la classe $\mathcal{D}$ di tutte le possibili suddivisioni di $[a,b]$.

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} s(D,f) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} S(D,f)$$

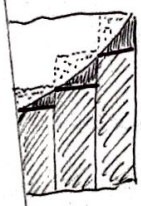
↑ lo più grande dei approssima per difetto

↑ la più piccola che approssima per eccesso

Definizione

Se $\sup_{D \in \mathcal{D}} s(D,f) = \inf_{D \in \mathcal{D}} S(D,f)$

dico che f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$



$f = \text{cost} = c$

$(b-a) \cdot c$

$$s(D,f)$$

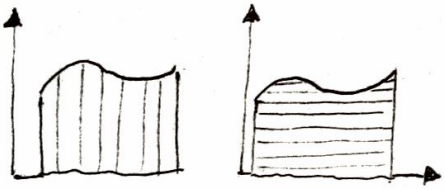
$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{(x_{i-1},x_i)} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sup_{(x_{i-1},x_i)} \cdot \Delta x_i =$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c \cdot (b-a) \quad = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c \cdot (b-a)$$

Esempio

χ, funzione di Dirichlet

$s(D,\chi)=0 \qquad S(D,\chi)=1$



Riemann Lebesgue

Definizione di Integrale di Reimann

$$\inf_{D\in\mathcal{D}} S(D,f) = \sup_{D\in\mathcal{D}} S(D,f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

dx = differenziale $\quad dx = h$

$df = f'$

$f = x \quad f' = 1$

Definizione alternativa di Integrale di Reimann

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diciamo che è R-integrabile su $[a,b]$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D_\varepsilon$ di $[a,b]$ tale che

$$S(D_\varepsilon,f) - s(D_\varepsilon,f) < \varepsilon$$

Importante

Cioè troviamo una suddivisione tale che la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore sia infinitesimale, Quindi arrivano a coincidere.

Proprietà dell'integrale di R

1. $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$
- $\int_a^b c f\,dx = c\int_a^b f\,dx$
- $\int_a^b (af+bg)\,dx = a\int_a^b f\,dx + b\int_a^b g\,dx$

2. $f>g \Rightarrow \int_a^b f\,dx > \int_a^b g\,dx$ (p. di monotonia)

3. $|f|$ è integrabile $\Rightarrow f$ è integrabile

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx$$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \int_c^b f(x)\,dx$ con $c\in[a,b]$

Definizione Intervalli orientati

Gli intervalli $[a,b]$ in cui $b>a$, si dicono orientati positivamente.

Definizione

Sia $[a,b]$ un intervallo orientato positivamente allora $\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_b^a f(x)\,dx$

Definizione

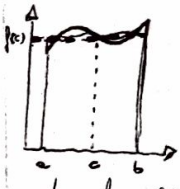
$\int_a^a f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} 0$

Altrimenti sarebbe complesso comprendere il significato di partizionare un intervallo di lunghezza 0. Inoltre l'integrale è definito solo su intervalli, ma avere un intervallo di lunghezza 0 non è ben definito.

Teorema della Media Integrale

$f\in C^0([a,b])$, allora $\exists\, c\in(a,b) \mid f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Cioè nell'intervallo esiste almeno un punto in cui si raggiunge la media integrale.



$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Cioè esiste un rettangolo che ha l'area uguale all'area sotto la curva, ed ha base a-b e altezza f(c).

Dimostrazione

Una funzione continua su un compatto è integrabile secondo Reimann. (da dimostrare dopo).

Poiché f è $C^0([a,b])$ e

1) f ha max e min (Th. Weierstrass)
2) f è integrabile (da dimostrare)
3) $m \le f \le M$ (Th. Darboux)

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \qquad \int_a^b m = m(b-a) \qquad \int_a^b M = M(b-a)$$

m e M sono costanti quindi integrabili, $f(x)$ è integrabile grazie alla (2).

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\frac{m(b-a)}{(b-a)} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{M(b-a)}{(b-a)}$$

Poichè f assume tutti i valori tra m e M, ed assume tutti i valori compresi, incluso $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, $\exists\, c \in [a,b] \mid f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

□

Se f è continua su un compatto allora se f è continua, f è anche uniformemente continua.
— Th. Heine-Cantor

Classe delle funzioni integrabili

Se $f \in C^0([a,b]) \Rightarrow$ è R-integrabile su $[a,b]$.

Dimostrazione

Per questa dimostrazione si sfrutta la continuità uniforme.

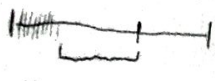
La continuità uniforme era come segue:

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x', x'' \in [a,b] \ \exists \delta$ tale che $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ se $|x' - x''| < \delta$

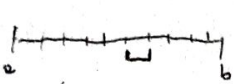
f è R-integrabile su $[a,b]$ se $\forall \varepsilon > 0$
$\exists D_\delta \mid S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$, $D_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$|D_\varepsilon| \triangleq \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - x_{i-1}|\}$ e la chiamo ampiezza della suddivisione.

È quindi una sorta di stima alla peggio della suddivisione.



Suddivisione più ampia



Suddiv. meno ampia.

ε nella def è solo ε, ma non fa molta diff. scrivere $\frac{\varepsilon}{b-a}$ invece di ε.

In questo caso prendiamo $|D_\varepsilon| < \delta$, dove δ è lo stesso della continuità uniforme.

Per ogni ε devo trovare una suddivisione che renda la differenza $|f(x') - f(x'')|$ molto vicina.

Sia $|D_\varepsilon| < \delta \mid S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \min_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i = M_i \Delta x_i - m_i \Delta x_i$$

M_i e $m_i \in f$, e cerco sono una coppia per ciascun intervallo

$$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i') - f(x_i'')\right) \cdot \Delta x_i$$ me

x_i' e x_i'' stanno dentro un intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ di ampiezza massima $< \delta$.

Quindi $|x_i' - x_i''| < \delta \Rightarrow |f(x_i') - f(x_i'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ∀ ⇒

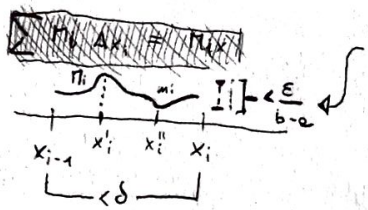
$$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b - a = \varepsilon$$

M_i e m_i sono vicini, con distanza $< \delta$

$$|S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f)| = S(D_\varepsilon, f| - s(D_\varepsilon, f) \overset{DT}{\le}$$

$$\overset{DT}{\le} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i'')| \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$$



Questo vale per ciascun intervallino.

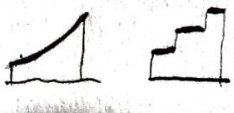
Teorema (monotona + limitata ⇒ R-integrabile)

$f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona e limitata $\Rightarrow f$ integrabile

Dimostrazione

Supponiamo che f sia crescente, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D_\varepsilon$ tale che $S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$?

$$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Delta x_i$$



$f(x_i) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$

$f(x_{i-1}) = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$

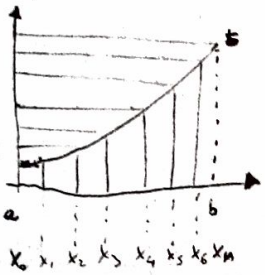
$|D_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(x_{i-1})]\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} (f(x_i)-f(x_{i-1}))|D_\varepsilon| <$

$< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b)-f(a)) = \varepsilon$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)-f(x_{i-1}) = f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\dots+f(x_n)-f(x_{n-1}) =$

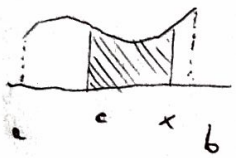
$= -f(x_0)+f(x_n) = f(b)-f(a).$



$f(b) = f(x_n)$
$f(a) = f(x_0)$

Def. funzione integrale

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile su $[a,b]$



$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

$F(x)$ è una ~~variabile~~ funzione di variabile reale e si chiama funzione integrale.

Th. Fondamentale del Calcolo Integrale (Gregory Barrow)

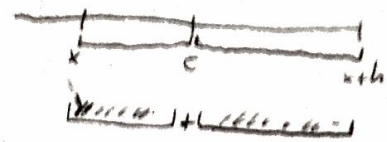
Se $f \in C^0[a,b]$ allora:

1. $F(x)$ è derivabile
2. $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione

$F(x+h)-F(x) =$ (per ora tralascio il denominatore)

$= \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^c f(t)\,dt$



Applichiamo il teorema della media:

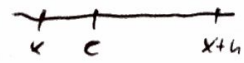
$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad \exists\, c \in (x, x+h)$

$f(c) = \frac{1}{x+h-x}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)\cdot h$

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(c)\cdot h}{h}$

Bisogna far vedere che F è derivabile!

$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(h)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$



se $h \to 0 \Rightarrow c \to x$

$= \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$ perché f è continua.

Non bisogna dare per scontato l'ultimo passaggio!

$\lim_{c\to x} f(c) = f(x) \Rightarrow F(x)$ è derivabile e

$F'(x) = f(x).$

Faccio il limite da entrambe le parti, e dal fatto che $\exists$ ed è finito il limite al secondo membro, deriva il fatto che sia così al primo membro.

Corollario

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Dimostrazione

$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$

Poiché $F(x)$ è una primitiva, devo aggiungere una costante! Pongo $x = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c \Rightarrow 0 = \int_a^a f(x)\,dt = 0 \Rightarrow c = -F(a)$

Pongo $x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Fondamentale, da quanche frequente

Esempio

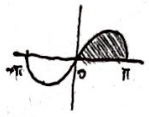
$$\int_1^2 x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int_1^2 x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{63}{6}$$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$F(b)$ $F(a)$

Esempio



$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

Integrale indefinito

Integrali immediati:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + c$
- $\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos(x)) + c$
- $\int \frac{3x^2}{x^3+2} = \ln(x^3+2) + c$ ← è buona norma verificare che $x^3+2 > 0$ spesso si scrive $\ln(|x^3+2|) + c$ quando non sia già ovviamente positivo.

Integrazione per parti

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\int (fg)' = \int (f'g + g'f) = \int f'g + \int g'f \Rightarrow$$

$$fg = \int f'g + \int g'f \Rightarrow \int f'g = fg - \int g'f$$

Esempio

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x = x(\ln x - 1) + c$$

Prova!

$$(x\ln x - x)' = 1\cdot \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Esempio

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx = -\cos x \cdot \sin x +$$

$$-\int -\cos x \cdot \cos x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\sin x\cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx =$$

$$= -\sin x\cos x + \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx \Rightarrow$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \operatorname{sen} x\cos x \Rightarrow$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2}$$

Questo tipo di integrali si chiamano

Integrali per ricorrenza

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx =$$

Errore comune:

Non pensare che valga regola per i prodotti!

Infatti: $\int e^x \sin x \neq \int e^x \cdot \int \sin x$

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I \Rightarrow$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

Integrazione per sostituzione

$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ Cerchiamo di trasformare la funzione in una più semplice!

$e^x = t \rightarrow \int \frac{t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}(t) + c \Rightarrow$

$x = \ln(t)$

$d(x) = \frac{1}{t}\,dt$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(e^x) + c$

Se l'integrale fosse definito, non sono obbligato a tornare in t!

$df(x) = f'(x)dx$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left[\arctg(e^x)\right]_0^1 = \arctg(e) - \arctg(1) =$$

$$= \arctg(e) - \frac{\pi}{4}$$

oppure restando in t

$$\left[\arctg(t)\right]_?^? \qquad e^x = t \Rightarrow \begin{cases} e^0 = 1 \\ e^1 = e \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\arctg(t)\right]_1^e = \arctg(e) - \arctg(1)$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^e \frac{\cancel{t}}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\cdot dt \;;$$

Metto ';' e calcolo l'integrale indefinito. Poi alla fine si applicano i nuovi intervalli.

Per sin e cos può essere utile usare le formule di bisezione e duplicazione.

Integrazione

- $\int \arcsin(x)\,dx$

- $\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

- $\int x^3 \arctg(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\arctg(x) - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^2}$

Cerchiamo la primitiva di x^3, poiché la conosciamo.

$I_1 = \int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ Cerchiamo di ricondurla ad un caso noto, quindi essendo m.eg. fratto al caso $\frac{f'(x)}{f(x)}$, ma per fare ciò il grado del num. deve essere inferiore a quello del den.

$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ Per fare ciò facciamo la divisione tra polinomi.

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+1 \\ -x^4-x^2 & x^2-1 \\ \hline = -x^2 & \\ x^2+1 & \\ = +1 & \end{array} \Rightarrow \frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \leftarrow \text{resto su divisore}$$

$$\Downarrow$$

$$\int x^2 - 1\,dx + \int \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \arctg(x) + c$$

Un modo alternativo che non richiede la divisione tra polinomi è il seguente:

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2} = \int \frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \int \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{(x^2+1)}} + \frac{1}{x^2+1}$$

$\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$ Come si risolve? Si semplifica al numeratore la derivata di ciò che sotto.

No non è che questa frazione è solo la somma di due frazioni più semplici?

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-3)}{x^2-2x-3} =$$

$$= \frac{Ax+A+Bx-3B}{x^2-2x-3} = \frac{(A+B)x+A-3B}{\cdot} = \frac{1}{\cdot}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B & A=\frac{1}{4} \\ -4B=1 & B=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1|.$$

Quindi ogni volta che al denominatore si trovano due radici, o più, si scompone o si ricercano i valori di A, B, etc... per che scomporre il polinomio.

Tuttavia nel seguente caso si può fare anche in un altro modo:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x+4}^{-2}-\overbrace{6}^{+6}}{x^2-2x-3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3| + 3\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx.$$

Quindi possiamo aggiungere o togliere o moltiplicare e dividere, per far comparire ciò che ci serve.

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx \Rightarrow \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} B=0 \\ A=0 \\ -A=1 \end{cases}$$ Non funziona perché c'è una radice reale doppia. In questi casi si procede diversamente.

Il problema è che stiamo cercando di risolvere un polinomio di grado 3 con solo 2 variabili. Allora usiamo così:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} = \frac{A(x-1)+Bx^2+Cx(x-1)}{x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax-A+Bx^2+Cx^2-Cx}{x^2(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A-C=0 \\ -A=1 \end{cases} \begin{cases} B-1=0 \\ -1-C=0 \\ A=-1 \end{cases} \begin{cases} B=1 \\ C=-1 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x} + \ln|(x-1)| - \ln|x| + c.$$

Proviamo in un altro modo:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{B}{x}\right) + \frac{C}{x}$$ In questo modo avrei la primitiva di B già risolvendo il sistema.

Esempio

$$\frac{1}{x^2+x+1} =$$

Vorrei ricondurre questo ad un caso noto. Il $\ln$ non può essere, ma forse arctg sì. Allora cerco di trasformarlo in $\frac{1}{1+(?)^2}$

Sembra generato da $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ più qualcosa, proviamo:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4} = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$$

Sostituiamo allora:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

Volendolo fare diversamente, si può trovare la scomposizione nel modo seguente:

$$x^2+x+1=0 \rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha+i\beta \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{quindi:}$$

$$x^2+x+1 = (x-\alpha)^2+\beta^2 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = x^2+x+1$$

Formula

Ogni polinomio a radici complesse può essere scomposto come $(x-\alpha)^2+\beta^2$

Esempio

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x-1}$$ ma non basta, questo sistema non ha abbastanza coeff.

La scomposizione giusta è $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+Cx^2+C}{}$ =

$$= \underbrace{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+C}_{''} \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B-A=0 \\ C-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A=B \\ C-B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=-C \\ A=B \\ 2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \int -\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)+\frac{1}{2}\ln(|x-1|)$$

#Serie Numeriche

Data una successione $\{a_n\}$ con $n\in\mathbb{N}$

- $S_0 = a_0$
- $S_1 = a_0+a_1$
- $S_2 = a_0+a_1+a_2$
- $\vdots$
- $S_n = a_0+a_1+\dots+a_n$

La successione S_n si chiama somma parziale della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Def. serie numerica convergenti

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente se

$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ e S si dice somma reale.

Ricorda che non è un'operazione aritmetica, ma un'operazione analitica al limite.

Def. serie numerica divergente

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$.

Def. serie numerica indeterminata

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è indeterminata se $\nexists \lim_{n\to+\infty} S_n$

Esempio

Divergente: $\sum_{n=0}^{+\infty} n \rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Esempio

Indeterminata: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$

$S_{2n} = 0$

$S_{2n+1} = 1$ $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty}$

Se non ho un'espressione esplicita cerco di cogliere una regola dai primi elementi.

Esempio

Serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

$\{q^n\} = 1, q, q^2, q^3, \dots \qquad q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$

q si chiama ragione perché è il rapporto tra due elementi successivi.

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Dimostrazione $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Per induzione

$\sum_{n=0}^{1} q^n = 1+q$ e con la formula $S_1 = \frac{1-q^2}{1-q} = 1+q$

Supponiamo la vera per $n-1$ e controlliamo per n

$S_n = \sum_{n=0}^{n} a_n + a_{n+1} = \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ □

Dimostrazione $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Costruttiva

$S_n = 1+q+\dots+q^n$

$qS_n = q+q^2+\dots+q^{n+1}$

$S_n - qS_n = 1 + \cancel{q} + \dots + \cancel{q^n} + q^{n+1} - \cancel{q} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$

$\Rightarrow S_n(1-q) = 1-q^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} =$

- se $|q|<1$ $\quad S = \frac{1}{1-q}$
- se $q=-1$ $\quad$ indeterminata
- se $q>1$ $\quad S_n \to \infty \Rightarrow$ diverge
- se $q \le -1$ $\quad$ indeterminata

Manca il caso $q=1$ che non può essere studiato con la formula data.

$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1+1+\dots+1 = \infty \Rightarrow$ per $q=1$ $S_n \to \infty \Rightarrow$ diverge

Esempio

$q = \frac{1}{2}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Esempio

Serie telescopiche (caso particolare $a_n = \frac{1}{n}$)

$\sum_{n=0+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}$

ma notiamo che

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

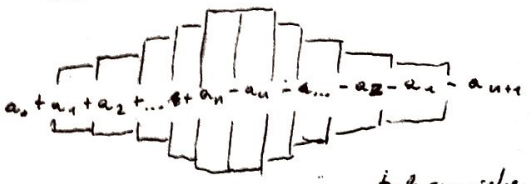
$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 = S$ serie con somma 1

Def. Serie telescopiche

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n+1}$

$S_n = a_0 - a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

se $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ esiste ed è finito, la serie telescopica converge



Motivo per cui si chiamano telescopiche

Criterio convergenza serie numeriche (Cauchy)

Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid |S_n - S_m| < \varepsilon$ per $n, m > N$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Vale il viceversa.

(Non dimostrato, segue da succ. di Cauchy)

Riscriviamo in maniera esplicita:

$|S_n - S_m| = |a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m)| =$

$= |a_{m+1} + \dots + a_n|$

Poniamo $m+1 = p$ $\quad n = p+q$ $\quad q \ge 0$

$\Rightarrow |a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+q}| < \varepsilon$